Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

-из математике-

Раслојење простора $\mathbb{R}^3$

Аутор
Ива Ђондовић

Ментор
Катарина Лукић

Београд, 2021.

Садржај

1 Увод **2**

2 Стереографска пројекција **3**

3 Кватерниони **7**

4 Хопфово пресликавање из сфере S^3 у сферу S^2 **9**

5 Веза између осних ротација и Хопфовог пресликавања **12**

6 Попуњавање простора $\mathbb{R}^3$ уланчаним круговима и правом **18**

7 Закључак **25**

Литература **26**

1 Увод

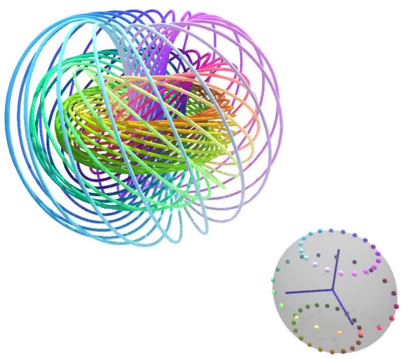
У основној школи смо научили како изгледају круг у равни и сфера у простору димензије три, а у овом раду приказаћемо како помоћу тродимензионе сфере S^3 у простору $\mathbb{R}^4$ можемо попунити простор $\mathbb{R}^3$.

Прво ћемо дефинисати сфере у просторима димензије n, а затим ћемо описати пресликавање које пресликава n-димензиону сферу у еуклидски простор димензије n. То пресликавање се назива стереографска пројекција. Први ју је изучавао математичар Птоломеј пореклом из Александрије, а користили су је и Грци из хеленистичког доба у конструкцији астрономског инструмента астролаба. Стереографска пројекција има бројне примене у картографији, геологији, кристалографији и контроли авионског саобраћаја.

Затим ћемо дати кратак преглед о настанку кватерниона које је открио ирски математичар Хамилтон 1835. године док је шетао са својом женом преко моста у Ирској. Познато је да су осне ротације значајна пресликавања у геометрији и да је важно питање шта је композиција две осне ротације чије се осе секу. Користећи својства кватерниона Хамилтон је повезао композицију осних ротација у простору са множењем кватерниона чиме је знатно олакшао проблем налажења осе осне ротације која се добија као композиција неке две осне ротације.

1931. године немачки математичар Хајнц Хопф је открио једно непрекидно пресликавање h из сфере S^3 у сферу S^2 такво да је инверзна слика (праслика) произвољне тачке са сфере S^2 велики круг сфере S^3. Испоставља се да су за $P \neq (1,0,0)$ кругови $h^{-1}(P)$ на сфери S^3 такви да су њихове стереографске пројекције кругови у простору $\mathbb{R}^3$, док је стереографска пројекција $h^{-1}(1,0,0)$ x-оса у простору $\mathbb{R}^3$. Геометријска својства тих стереографских пројекција су детаљно истражена у раду и показано је да имају занимљиву визуелизацију у $\mathbb{R}^3$.

У раду су искоришћене стереографске пројекције $h^{-1}(P)$, за $P \in S^2$, да би се попунио простор $\mathbb{R}^3$ помоћу кругова и x-осе. При томе x-оса продире раван сваког круга у унутрашњости тог круга и свака два круга су уланчана, односно један круг продире раван другог круга, једном у унутрашњости, а други пут у спољашњости тог круга. На тај начин су наизглед независни математички појмови стереографска пројекција, Хопфово пресликавање и кватерниони повезани и решен је проблем раслојења простора $\mathbb{R}^3$ помоћу кругова и једне праве.



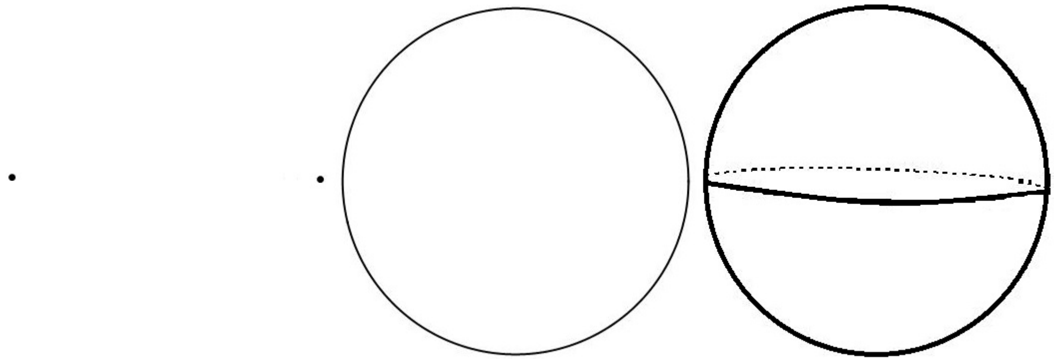
Стереографске пројекције неких праслика Хопфовог пресликавања

2 Стереографска пројекција

Стандардну јединичну сферу димензије 0 означавамо са S^0 и она представља пар тачака односно два реална решења једначине $x_1^2 = 1$, а то су $x_1 = -1$ и $x_1 = 1$ и оба су на удаљености 1 од координатног почетка на правој. Зато можемо писати $S^0 = \{-1, 1\}$.

Стандардна јединична сфера димензије 1 се означава са S^1 и то је скуп тачака у равни које су на истој удаљености 1 од фиксираног центра $(0,0)$, а то су заправо решења једначине $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Стандардна јединична сфера димензије 2 се означава са S^2 и то је скуп тачака у простору које су на истој удаљености од фиксираног центра $(0,0,0)$, а то су решења једначине $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Када се не нагласи димензија сфере мисли се на сферу S^2 која представља границу лопте у простору $\mathbb{R}^3$. Велики кругови су кругови на сфери који се могу представити као пресеци равни које садрже центар сфере са сфером.

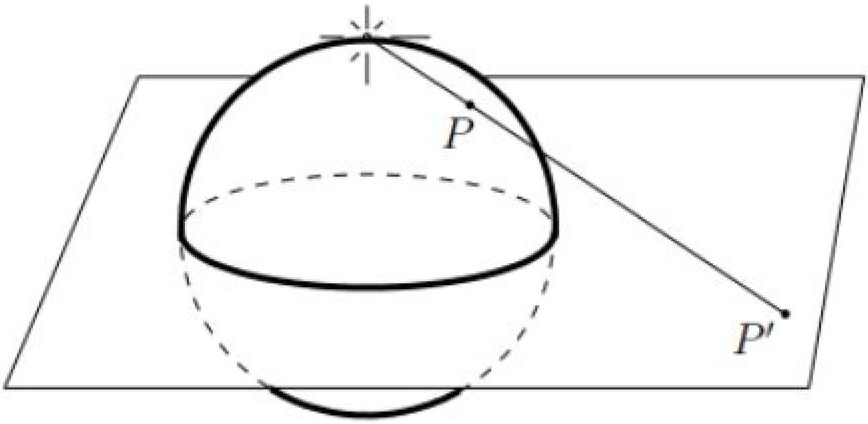


Лево: сфера S^0, у средини: сфера S^1, десно: сфера S^2

Проширујући овај концепт долазимо до појма вишедимензионе n-сфере S^n.

Дефиниција 1. Стандардна јединична n-сфера у ознаци S^n (у наставку рада n-сфера) је скуп тачака $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ у $\mathbb{R}^{n+1}$ за које важи $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$.

Иако је вишедимензионе сфере теже визуелизовати, геометријска интуиција нам говори да је S^n скуп тачака из $\mathbb{R}^{n+1}$ чија је удаљеност од координатног почетка једнака 1. Сфере S^0, S^1 и S^2 можемо визуелизовати, али проблем настаје већ код сфере S^3 јер се она налази у простору $\mathbb{R}^4$. Проблем визуелизације сфере S^3 бисмо могли решити да се налази у простору $\mathbb{R}^3$. Искористићемо стереографску пројекцију коју ћемо прво описати у случају када сликамо сферу S^2 у xy раван. Замислимо да је извор светлости постављен у северни пол односно у тачку $(0,0,1)$. Тада ова пројекција шаље тачку P са сфере S^2 у пресечну тачку светлосног зрака из северног пола кроз тачку P са равни xy. Приметимо да за тачку $(0,0,1)$ нема смисла дефинисати њену слику примењујући описани поступак, што је разлог да извршимо рестрикцију домена стереографске пројекције на скуп $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$.



Стереографска пројекција

***Теорема* 1.** *Стереографска пројекција из скупа* $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ *у скуп* $\mathbb{R}^2$ *је пресликавање описано формулом* $(x,y,z) \mapsto (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$.

Доказ. Права која представља светлосни зрак који дефинише стереографску пројекцију садржи тачке $P(x,y,z)$ и $(0,0,1)$, те је њена једначина $\frac{X-0}{x-0} = \frac{Y-0}{y-0} = \frac{Z-1}{z-1} = t$, односно $X = xt$, $Y = yt$ и $Z = (z-1)t+1$, где је $t \in \mathbb{R}$. Тражена слика тачке (x,y,z) при стереографској пројекцији је заправо тачка ове праве чија је трећа координата Z једнака нули, односно $(z-1)t+1 = 0$, одакле је $t = \frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z}$ при чему немамо дељење са нулом јер је домен стереографске пројекције $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$. Зато су прве две координате једнаке $X = \frac{x}{1-z}$ i $Y = \frac{y}{1-z}$ чиме је доказано да је стереографска пројекција описана формулом $(x,y,z) \mapsto (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$. □

***Теорема* 2.** *Пресликавање из* $\mathbb{R}^2$ *у* $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ *инверзно стереографској пројекцији је описано формулом* $(a,b) \mapsto \left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, 1 - \frac{2}{a^2+b^2+1}\right)$.

Доказ. Да бисмо нашли формулу за инверзно пресликавање које $\mathbb{R}^2$ слика у $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ треба да за дату тачку (a,b) из равни нађемо координате (x,y,z) тачке са S^2 која се при стереографској пројекцији слика у тачку (a,b). То ће бити пресечна тачка сфере S^2 и праве која пролази кроз тачке $(0,0,1)$ и $(a,b,0)$. Та права има једначину $\frac{X-0}{a} = \frac{Y-0}{b} = \frac{Z-1}{-1} = t$, односно она је скуп тачака облика $X = at$, $Y = bt$, $Z = -t+1$ за $t \in \mathbb{R}$. Тражимо тачку са ове праве која припада сфери S^2 односно за коју је:

$$
\begin{aligned}
(at)^2 + (bt)^2 + (1-t)^2 &= 1, \\
a^2t^2 + b^2t^2 + 1 - 2t + t^2 &= 1, \\
(a^2+b^2+1)t^2 &= 2t.
\end{aligned}
$$

Разликујемо два случаја, када је $t = 0$ и $t \neq 0$. За $t = 0$ бисмо добили тачку $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 1$ односно $N(0,0,1)$ што није могуће јер смо рестриковали стереографску пројекцију на $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$. За $t \neq 0$ након скраћивања са t добијамо $t = \frac{2}{a^2+b^2+1}$ па је тражено инверзно пресликавање дато са

$$
(a,b) \mapsto \left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, 1 - \frac{2}{a^2+b^2+1}\right).
$$

□

Слично као и дефиниција сфере, стереографска пројекција се може генерализовати на веће димензије, специјално и на пресликавање из $S^3 \setminus (1,0,0,0) \to \mathbb{R}^3$ које је дато помоћу формуле $(w,x,y,z) \mapsto (\frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}, \frac{z}{1-w})$ при чему је светлосни зрак сада постављен у тачку $(1,0,0,0)$ на сфери S^3. Стереографска пројекција нам је корисна јер нам омогућава да сферу $\mathbb{S}^3$ (без једне тачке) која се налази у простору димензије четири посматрамо у простору $\mathbb{R}^3$.

Наредна теорема је била позната и Грцима из хеленистичког доба и може се наћи у Аполонијевом[1] делу „Купини пресеци“ и коришћена је у конструкцији астролаба, астрономског инструмента који се користио за одређивање и предвиђање положаја Сунца, Месеца, планета и звезда, као и за одређивање месног времена из задане географске дужине и обрнуто.

***Теорема* 3.** *Круг на сфери S^2 који садржи тачку $(0,0,1)$ се помоћу стереографске пројекције чији је извор светлости постављен у северни пол $N(0,0,1)$ слика у праву у равни, док се круг на сфери S^2 који не садржи тачку $(0,0,1)$ слика у круг у равни.*

Доказ. Нека је c круг на јединичној сфери S^2 коју пресликавамо стереографском пројекцијом. Круг c је скуп тачака сфере S^2 које припадају некој равни α датој једначином

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

где су A, B, C и D реални бројеви такви да је $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Да бисмо одредили скуп тачака (x,y) из xy равни које су слике тачака са круга c при стереографској пројекцији заменићемо формулу из Теореме 2 у (1). Тако добијамо

$$A\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}\right) + B\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right) + C\left(\frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right) + D = 0,$$

што након множења са $1 + x^2 + y^2$ постаје

$$A(2x) + B(2y) + C(x^2+y^2-1) + D(1+x^2+y^2) = 0,$$

што је еквивалентно са

$$2Ax + 2By + (C+D)(x^2+y^2) = C - D. \tag{2}$$

Ако круг c садржи северни пол $N(0,0,1)$ онда замењујући његове координате у једначину (1) добијамо $C + D = 0$. У том случају једначина (2) постаје $2Ax + 2By = C - D$ што је једначина праве у равни. Приметимо и да A и B не могу истовремено бити једнаки нули јер би у том случају било $C = D$ што би са $C + D = 0$ дало да је $C = 0$, али тада је $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ што није могуће. Одавде следи да се круг c са сфере S^2 који садржи северни пол $N(0,0,1)$ при стереографској пројекцији слика у праву у xy равни. Са друге стране, ако круг c не садржи тачку $N(0,0,1)$ онда је $C + D \neq 0$. У том случају можемо поделити једначину (2) са $C + D \neq 0$ чиме добијамо једначину

$$x^2 + y^2 + \frac{2A}{C+D}x + \frac{2B}{C+D}y = \frac{C-D}{C+D},$$

која је еквивалентна са

$$\left(x + \frac{A}{C+D}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{C+D}\right)^2 = \frac{A^2+B^2+C^2-D^2}{(C+D)^2}. \tag{3}$$

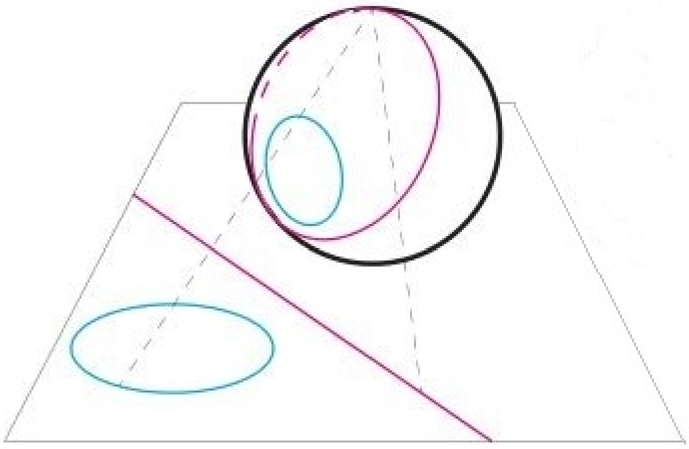
Како из аналитичке геометрије знамо да је формула за растојање координатног почетка од равни α дата формулом

$$\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

[1]Аполоније из Пергама (262. година пре нове ере - 190. година пре нове ере), антички хеленски математичар и астроном

као и да је то растојање мање од 1 јер раван α сече сферу S^2, то важи $D^2 < A^2+B^2+C^2$ па је $\frac{A^2+B^2+C^2-D^2}{(C+D)^2}$ позитиван реалан број. Једначина (3) зато представља једначину круга са центром $\left(-\frac{A}{C+D}, -\frac{B}{C+D}\right)$ полупречника $R = \sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2-D^2}{(C+D)^2}}$ у xy равни. $\square$

Алгебарски доказ претходне теореме се може променити тако да важи и када се стереографска пројекција уопшти на више димензије што ћемо користити касније.



Слике кругова при стереографској пројекцији

3 Кватерниони

Хамилтон[2] је 1835. године открио да може да посматра комплексне бројеве као уређене парове реалних бројева. Био је задивљен везом између комплексних бројева и дводимензионе геометрије и желео је да открије већу алгебру која ће да игра сличну улогу у тродимензионој геометрији. Средином *XIX* века он је решавајући овај проблем конструисао кватернионе.

Хамилтон је годинама покушавао да осмисли структуру која би одговарала ротацијама у $\mathbb{R}^3$ користећи уређене тројке реалних бројева. Проблем се састојао у проналажењу начина за множење уређених тројки тако да важе својства на која смо навикли, на пример асоцијативност, комутативност, да постоји инверз сваког ненула елемента и да можемо да дефинишемо норму која ће такође имати лепа својства. На језику модерне математике, тражи се тродимензиона реална нормирана алгебра са дељењем.

Осам година касније, Хамилтон је схватио да може да уради слично не за тројке, већ за четворке реалних бројева, с тим што неће моћи да добије да је множење комутативно. Као што у скупу комплексних бројева постоји имагинарна јединица i, увео је још две j и k, тако да одговарају осталим двема координатама, дефинисао је међу њима правило множења и тако су настали кватерниони. Занимљиво је да се то догодило док је шетао са својом женом преко моста у Даблину, главном граду Ирске. Хамилтон је одмах записао то дуго очекивано правило за множење кватерниона на камену моста. Данас на том месту стоји плоча са описом овог Хамилтоновог открића. Хамилтон је остатак свог живота провео истражујући кватернионе и њихову примену у геометрији.

Хамилтон и његова плоча на мосту у Даблину

Кватерниони су као скуп исти као $\mathbb{R}^4$ и означавају се са $\mathbb{H}$, при чему су уређеним четворкама $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ и $(0,0,0,1)$ додељена имена i, j и k. Када се на вектор (a,b,c,d) мисли у смислу кватерниона онда се он записује у облику $a+bi+cj+dk$. Број a се назива реални део, док се b, c и d редом зову i, j и k делови. Сабирање кватерниона $q_1 = a_1+b_1i+c_1j+d_1k$ и $q_2 = a_2+b_2i+c_2j+d_2k$ се дефинише на природан начин помоћу $q_1+q_2 = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i+(c_1+c_2)j+(d_1+d_2)k$ док је множење било теже дефинисати и то је било поменуто Хамилтоново откриће на мосту у Даблину. Множење се врши помоћу правила $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j$. Елементи i, j и k не комутирају.

[2] William Rowan Hamilton (1805-1865), ирски математичар

Када једнакост $ij = k$ помножимо са леве стране са i добијамо $i^2j = ik$, што се због $i^2 = -1$ своди на $ik = -j$. Аналогно се доказује и да је $ji = -k$ када $jk = i$ помножимо са леве стране са j и $kj = -i$ када $ij = k$ помножимо са десне стране са j. Наведимо сада један пример множења кватерниона.

***Пример* 1.** *Помножити кватернионе $5+j$ и $1-2i+3k$.*

Решење. $(5+j)(1-2i+3k) = 5-10i+15k+j-2ji+3jk = 5-10i+15k+j-2(-k)+3i =$ *5-7i+j+17k.*

***Лема* 1.** *Елементи скупа $\mathbb{H}$ могу се написати као збир једног комплексног броја и другог комплексног броја помноженог са j.*

Доказ. Нека је $a+bi+cj+dk$ произвољни елемент скупа $\mathbb{H}$. Тада је $a+bi+cj+dk = a+bi+cj+dij = (a+bi)+(c+di)j$, односно кватернион $a+bi+cj+dk$ се може записати као збир комплексног броја $a+bi$ и комплексног броја $c+di$ помноженог са j. $\square$

Дефиниција 2. Конјугат кватерниона $r = a+bi+cj+dk$ је кватернион $\bar{r} = a-bi-cj-dk$.

***Лема* 2.** *За оператор конјуговања важи $\overline{rs} = \bar{s}\cdot\bar{r}$.*

Доказ. Нека је $r = a+bi+cj+dk$ и $s = a_1+b_1i+c_1j+d_1k$. Производ ова два кватерниона је $rs = (aa_1-bb_1-cc_1-dd_1)+(ab_1+ba_1+cd_1-dc_1)i+(ac_1-bd_1+ca_1+db_1)j+(ad_1+bc_1-cb_1+da_1)k$, те је $\overline{rs} = (aa_1-bb_1-cc_1-dd_1)-(ab_1+ba_1+cd_1-dc_1)i-(ac_1-bd_1+ca_1+db_1)j-(ad_1+bc_1-cb_1+da_1)k$. Са друге стране је $\bar{s}\cdot\bar{r} = (a_1-b_1i-c_1j-d_1k)(a-bi-cj-dk) = (aa_1-bb_1-cc_1-dd_1)-(ba_1+ab_1-dc_1+cd_1)i-(ca_1+db_1+ac_1-bd_1)j-(da_1-cb_1+bc_1+ad_1)k$, те је $\overline{rs} = \bar{s}\cdot\bar{r}$. $\square$

Дефиниција 3. Дужина или норма кватерниона r у ознаци $\|r\|$ је његова дужина као вектора у $\mathbb{R}^4$ и важи $\|r\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

Већ смо приметили да множење кватерниона није комутативно јер је на пример $ik = -j$, док је производ $ki = j$, а може се проверити да јесте асоцијативно односно да за свака три кватерниона p, q и r важи $p(qr) = (pq)r$. Приметимо да је $r\bar{r} = (a+bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk) = a^2-abi-acj-adk+abi-b^2i^2-bcij-bdik+caj-bcji-c^2j^2-cdjk+adk-bdki-cdkj-d^2k^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$ односно $\|r\| = \sqrt{r\bar{r}}$.

***Лема* 3.** *Норма дефинисана на кватернионима је мултипликативна, односно за произвољне $r,s \in \mathbb{H}$ важи $\|rs\| = \|r\|\|s\|$.*

Доказ. Из Леме 2 имамо $\|rs\| = \sqrt{rs\overline{rs}} = \sqrt{rs\bar{s}\bar{r}} = \sqrt{r\|s\|^2\bar{r}} = \|s\|\sqrt{r\bar{r}} = \|s\|\|r\| = \|r\|\|s\|$. $\square$

***Лема* 4.** *Сваки кватернион $r \neq 0$ има мултипликативни инверз $r^{-1} = \frac{\bar{r}}{\|r\|^2}$.*

Доказ. $r^{-1}r = \frac{\bar{r}r}{\|r\|^2} = \frac{\bar{r}\bar{\bar{r}}}{\|r\|^2} = \frac{\|\bar{r}\|^2}{\|r\|^2} = 1$ и $rr^{-1} = \frac{r\bar{r}}{\|r\|^2} = \frac{\|r\|^2}{\|r\|^2} = 1$ при чему смо користили својства $\bar{\bar{r}} = r$ и $\|r\| = \|\bar{r}\|$. Прво својство $\bar{\bar{r}} = r$ директно следи из дефиниције конјугата јер ако је $r = a+bi+cj+dk$ онда је $\bar{\bar{r}} = \overline{a-bi-cj-dk} = a+bi+cj+dk = r$. Друго својство следи из $\|\bar{r}\| = \|a-bi-cj-dk\| = \sqrt{a^2+(-b)^2+(-c)^2+(-d)^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. $\square$

4 Хопфово пресликавање из сфере S^3 у сферу S^2

Немачки математичар Хајнц Хопф 1931. године је открио неке занимљиве чињенице о разлагањима сфера већих димензија на сфере мањих димензија и од тада се ове појаве називају Хопфове фибрације. Назив фибрација води порекло од аналогије ове појаве са влакнима у тканини (на латинском језику fibra значи влакно). Испоставља се да постоје четири фибрације сфера већих димензија помоћу сфера мањих димензија и то S^1 помоћу S^0 користећи S^1, S^3 помоћу S^2 и S^1, S^7 помоћу S^3 преко S^4, S^{15} помоћу S^7 користећи S^8.

Особине Хопфових фибрација се проучавају од прве половине *XX* века. Спој њихове богате математичке културе и бројних примена у другим наукама заинтересовале су неке од највећих научника да их проучавају. Геометријска својства Хопфових фибрација су веома значајна за њихове бројне примене у областима попут алгебарске топологије, квантне механике, теорије Дираковх магнетних монопола и геометрије хармонијских осцилатора. Хопфове фибрације су круцијалне за разумевање многих физичких система и служе као веза између геометрије и физике. Због своје лепоте, делове Хопфове фибрације можемо видети и у грађевинарству, архитектури и уметности.

Делови Хопфове фибрације у Musée de l'Oeuvre Notre-Dame, Strasbourg

Када се каже Хопфова фибрација, обично се мисли на најчешће примењивану од четири Хопфове фибрације, а то је она која описује сферу S^3 преко круга S^1 и сфере S^2. Пресликавање које ово омогућава означавамо са h и зовемо га Хопфово пресликавање, а заправо га срећемо кад год наиђемо на свежањ кључева.

Фибре Хопфовог пресликавања као део свежња кључева

То је једно непрекидно пресликавање из сфере S^3 у сферу S^2 такво да различите тачке са сфере S^2 представљају слике различитих кругова на сфери S^3, те зато кажемо да је сфера S^3 састављена од фибри, при чему је свака фибра заправо круг и при томе сваки одговара некој тачки са сфере S^2.

Дефиниција 4. Хопфово пресликавање из S^3 у S^2 је пресликавање $h\colon S^3 \to S^2$ задато са

$$h(a,b,c,d) = (a^2+b^2-c^2-d^2, 2(ad+bc), 2(bd-ac)). \tag{4}$$

Приметимо да је ово пресликавање заиста коректно дефинисано јер сваку тачку (a,b,c,d) са S^3 односно такву да је $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ слика у тачку са сфере S^2 јер је

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+(2(ad+bc))^2+(2(bd-ac))^2\\
=\ & a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2a^2d^2-2b^2c^2-2b^2d^2\\
&+2c^2d^2+4a^2d^2+8abcd+4b^2c^2+4b^2d^2-8abcd+4a^2c^2\\
=\ & a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2\\
=&(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=1^2=1.
\end{aligned}$$

Сада ћемо за Хопфово пресликавање $h : S^3 \to S^2$ доказати да је инверзна слика $h^{-1}(w)$ за произвољну тачку $w \in S^2$ велики круг на сфери S^3.

Лема 5. *Праслика $h^{-1}(w)$ произвољне тачке w са сфере S^2 је велики круг на сфери S^3, где је h Хопфово пресликавање из* (4).

Доказ. Нека је $w=(w_1,w_2,w_3) \in S^2$ произвољна тачка. Ако $(a,b,c,d) \in h^{-1}(w)$ онда важи:

$$a^2+b^2-c^2-d^2 = w_1, \tag{5}$$
$$2(bc+ad) = w_2, \tag{6}$$
$$2(bd-ac) = w_3, \tag{7}$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2 = 1, \tag{8}$$

где последња једначина следи из $(a,b,c,d) \in S^3$. Циљ је да изразимо a,b,c,d преко w_1,w_2,w_3. Одузимањем једначине (5) од једначине (8) добијамо: $c^2+d^2=\frac{1-w_1}{2}$. Једначине (6) и (7) можемо записати у матричном облику као:

$$\begin{bmatrix} d & c\\ -c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\\ b\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} w_2\\ w_3\end{bmatrix}.$$

Детерминанта леве матрице је c^2+d^2 што смо већ изразили преко w_1. Ако је $w_1=1$ онда је детерминанта нула и имамо специјалан случај северног пола на S^2 за који је $c=d=0$ и $a^2+b^2=1$. У том случају инверзно Хопфово пресликавање даје круг у S^3. У супротном, детерминанта посматране матрице није нула, те је можемо инвертовати и тада је:

$$\begin{bmatrix} a\\ b\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1-w_1}\begin{bmatrix} d & -c\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_2\\ w_3\end{bmatrix},$$

одакле следи:

$$(1-w_1)\begin{bmatrix} a\\ b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_2\\ w_3\end{bmatrix}.$$

Ово можемо еквивалентно записати као следеће две једначине:

$$(1-w_1)a + w_3c - w_2d = 0,$$
$$(1-w_1)b - w_2c - w_3d = 0.$$

Ако са q означимо (a,b,c,d) онда претходне две једначине можемо записати као $\langle x,q\rangle = 0$ и $\langle y,q\rangle = 0$ ($\langle,\rangle$ је скаларни производ) и:

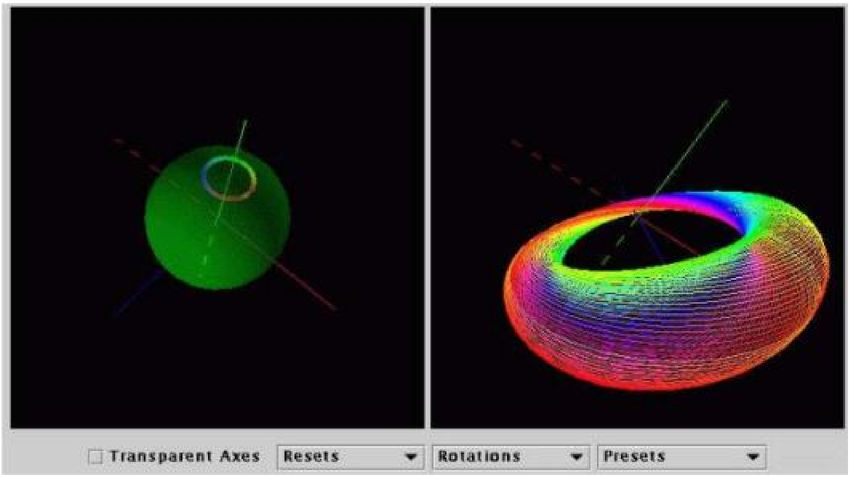
$$x = \begin{bmatrix} 1-w_1\\ 0\\ w_3\\ -w_2\end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0\\ 1-w_1\\ -w_2\\ -w_3\end{bmatrix}.$$

Вектори x и y су линеарно независни јер из $s_1x + s_2y = 0$ изједначавањем левих и десних координата директно следи $s_1 = s_2 = 0$. Зато једначине $\langle x, q\rangle = 0$ и $\langle y, q\rangle = 0$ одређују потпростор димензије два у $\mathbb{R}^4$ односно раван. Да бисмо одредили како је та раван смештена у S^3, нека је $q = \alpha u + \beta v$ еквивалентни облик те равни у $\mathbb{R}^4$, где су u и v линеарно независни вектори који су у тој равни и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Другим речима, како су x и y вектори нормални на раван, бирамо векторе u и v ортогоналне на њих односно такве да је $\langle x, u\rangle = \langle y, u\rangle = \langle x, v\rangle = \langle y, v\rangle = 0$. Додатно можемо изабрати векторе u и v да буду ортонормирани односно да је $\langle u, u\rangle = \langle v, v\rangle = 1$ и $\langle u, v\rangle = 0$. Сада још једном користимо услов да $q \in S^3$ да бисмо утврдили како посматрана раван сече S^3. Важи:

$$1 = \langle q, q\rangle = \alpha^2\langle u, u\rangle + 2\alpha\beta\langle u, v\rangle + \beta^2\langle v, v\rangle = \alpha^2 + \beta^2.$$

Слично као у првом случају који смо разматрали ово је једначина круга. Овим смо доказали да је праслика тачке при Хопфовом пресликавању заправо велики круг на сфери S^3. □

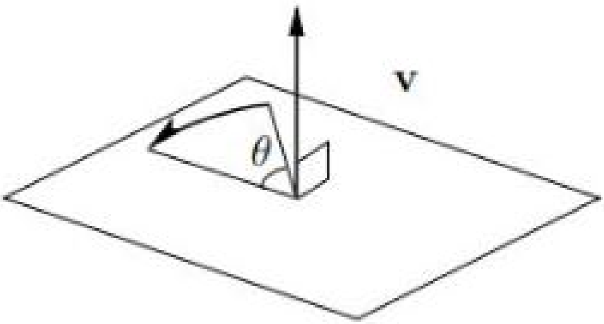
Како је технологија напредовала појавиле су се и нове могућности за визуелизацију Хопфовог пресликавања помоћу рачунара. На доњој слици лево је приказан скуп тачака које су на кругу кодомена S^2 Хопфовог пресликавања h, а десно су помоћу стереографске пројекције приказане фибре које одговарају тим тачкама у домену S^3. Наредне слике су део су компјутерске анимације коју је урадио студент Ник Хамблет са универзитета Lebanon Valley.



Компјутерска анимација која приказује фибре Хопфовог пресликавања

5 Веза између осних ротација и Хопфовог пресликавања

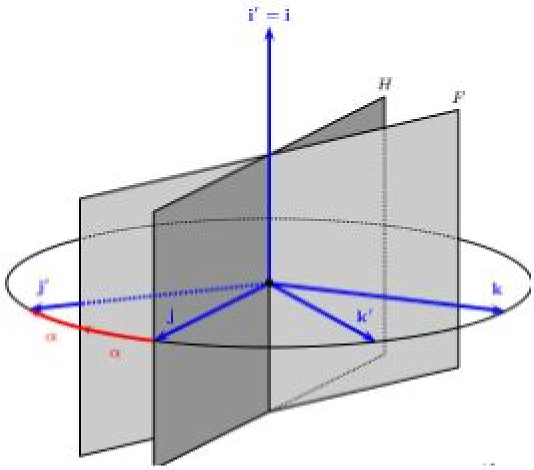
Један од начина да представимо осну ротацију око осе која садржи координатни почетак је да наведемо вектор осе ротације и угао те ротације око осе. По договору, ротација ће бити у смеру супротном од кретања казаљке на сату ако је дат позитиван угао θ, а у смеру кретања казаљке на сату за негативне углове $-\theta$, када се посматра са врха вектора осе ротације.



Ротација је одређена осом чији је вектор v и углом θ

Приметимо да за једну посматрану ротацију избор вектора осе и угла ротације није јединствен. Ротација одређена вектором v и углом θ је иста као ротација одређена вектором v и углом $\theta + 2n\pi$, где је n произвољан цео број. Уочимо да су четири реална броја довољна да одредимо ротацију, то су три координате за вектор и један реалан број којим је задат угао. Јасно је и да угао θ можемо изабрати тако да припада интервалу $[0, \pi]$. Природно питање које се намеће је шта би била композиција две ротације које су дате помоћу својих оса и углова. Један од геометријских начина да то одредимо је помоћу раванских рефлексија. Означимо са S_F раванску рефлексију у односу на раван F. Композиција раванских рефлексија $S_H \circ S_F$ при чему се равни H и F секу по правој i пресликава тачке простора као што их пресликава и ротација око осе i за два пута већи угао од угла између равни F и H, односно важи следећа лема.

***Лема* 6.** *Композиција две раванске рефлексије чије се равни секу је осна ротација. Оса добијене ротације је пресечна права те две равни, а угао ротације је два пута већи од угла између тих равни.*



Композиција две раванске рефлексије чије се равни секу

Приметимо да је $S_F \circ S_H$ инверзна ротација ротацији $S_H \circ S_F$ јер обе имају исту осу и једнаку апсолутну вредност угла, али се ротира у супротном смеру.

***Лема* 7.** *Свака ротација у простору се може представити као композиција $S_F \circ S_H$ две равански рефлексије.*

Доказ. Изаберимо произвољну раван H која садржи осу ротације. Тада постоје тачно две равни које садрже осу ротације и које са равни H граде угао једнак половини угла ротације. Изаберимо ону раван од те две равни која ће нам дати жељени смер ротације чиме је доказ ове леме завршен. □

Нагласимо да је избор прве раванске рефлексије произвољан док год изабрана раван садржи осу ротације и да смо доказ могли започети и избором друге раванске рефлексије (оне која ће се примењивати друга у композицији) и онда би нам раван прве раванске рефлексије била одређена једнозначно.

***Теорема* 4.** *Нека су r и r_0 две ротације око оса које садрже координатни почетак. Тада је њихова композиција $r_0 \circ r$ ротација око осе која садржи координатни почетак.*

Доказ. Нека је H раван која садржи обе осе ротација r и r_0. Таква раван постоји јер су по услову теореме осе праве које садрже координатни почетак. На основу претходне леме имамо да постоје равни F и F_0 такве да је $r = S_H \circ S_F$ и $r_0 = S_{F_0} \circ S_H$, те је $r_0 \circ r = S_{F_0} \circ S_H \circ S_H \circ S_F = S_{F_0} \circ S_F$ јер је $S_H \circ S_H = Id$ где је Id идентичко пресликавање. Како F и F_0 обе садрже координатни почетак (јер садрже осе ротација r и r_0) онда се оне секу, те је $S_{F_0} \circ S_F$ ротација око праве која садржи координатни почетак. □

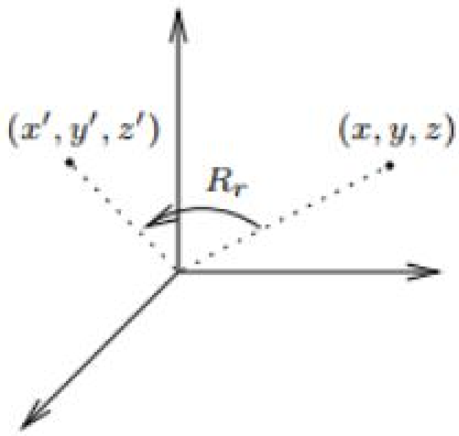
Из доказа претходне теореме закључујемо да интуитивно није једноставно закључити где ће бити оса добијене ротације и шта ће бити слика тачке коју желимо да ротирамо, а испоставља се да је одговор на то питање битан и у другим наукама. Средином XIX века ирски математичар Хамилтон је употребио кватернионе да би решио овај проблем.
Сваком кватерниону $r \neq 0$ придружујемо једно линеарно пресликавање $R_r \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Произвољној тачки $p(x, y, z)$ у простору димензије три придружујемо чисти кватернион $xi+yj+zk$ (кватернион чији је реални део једнак нула) који ћемо такође означавати са p. Рачунски се може проверити да ће и производ rpr^{-1} бити чист кватернион односно кватернион облика $x'i + y'j + z'k$, те му можемо придружити тачку (x', y', z') у тродимензионом простору. Заиста, ако је $r = a+bi+cj+dk$ и $N = a^2+b^2+c^2+d^2$ онда:

$$
\begin{aligned}
rpr^{-1} =&(a+bi+cj+dk)(xi+yj+zk)\frac{a-bi-cj-dk}{a^2+b^2+c^2+d^2}\\
=&\frac{1}{N}(a+bi+cj+dk)(xi+yj+zk)(a-bi-cj-dk)\\
=&\frac{1}{N}(axi+ayj+azk-bx+byk-bzj-cxk-cy+czi+dxj-dyi-dz)(a-bi-cj-dk)\\
=&\frac{1}{N}\big((-bx-cy-dz)+(ax+cz-dy)i+(ay-bz+dx)j+(az+by-cx)k\big)(a-bi-cj-dk)\\
=&\frac{1}{N}\big((-abx-acy-adz+abx+bcz-bdy+acy-bcz+cdx+azd+bdy-cdx)\\
&+(b^2x+bcy+bdz+a^2x+acz-ady-ady+bdz-d^2x+acz+bcy-c^2x)i\\
&+(bcx+c^2y+cdz+adx+cdz-d^2y+a^2y-abz+adx-abz-b^2y+bcx)j\\
&+(bdx+cdy+d^2z-acx-c^2z+cdy+aby-b^2z+bdx+a^2z+aby-acx)k\big)\\
=&\frac{1}{N}\big((b^2x+2bcy+2bdz+a^2x+2acz-2ady-d^2x-c^2x)i\\
&+(2bcx+c^2y+2cdz+2adx-d^2y+a^2y-2abz-b^2y)j\\
&+(2bdx+2cdy+d^2z-2acx-c^2z+2aby-b^2z+a^2z)k\big).
\end{aligned}
$$

Одавде следи да је

$$x' = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(b^2x + 2bcy + 2bdz + a^2x + 2acz - 2ady - d^2x - c^2x),$$
$$y' = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(2bcx + c^2y + 2cdz + 2adx - d^2y + a^2y - 2abz - b^2y),$$
$$z' = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}(2bdx + 2cdy + d^2z - 2acx - c^2z + 2aby - b^2z + a^2z).$$

Дефинишемо пресликавање $R_r\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ помоћу $R_r(x,y,z) = (x',y',z')$.



Ненула кватернион r дефинише пресликавање R_r

Лема 8. *Нека је $r = a + bi + cj + dk$ ненула кватернион. Пресликавање R_r је линеарно пресликавање такво да за сваки ненула реални скалар k важи $R_{kr} = R_r$. Важи и да је R_r инвертибилно пресликавање чији је инверз $R_{r^{-1}}$.*

Доказ. Да бисмо доказали да је R_r линеарно пресликавање довољно је да докажемо да важи $R_r(\alpha p) = \alpha R_r(p)$ за $\alpha \in \mathbb{R}, p(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ и $R_r(p_1 + p_2) = R_r(p_1) + R_r(p_2)$ за $p_1(x_1,y_1,z_1), p_2(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$. Те једнакости следе из:

$$\begin{aligned}
R_r(p_1+p_2) &= R_r((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) \\
&= R_r(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = r((x_1+x_2)i + (y_1+y_2)j + (z_1+z_2)k)r^{-1} \\
&= (r(x_1+x_2)i + r(y_1+y_2)j + r(z_1+z_2)k)r^{-1} = (rx_1i + rx_2i + ry_1j + ry_2j + rz_1k + rz_2k)r^{-1} \\
&= (r(x_1i+y_1j+z_1k) + r(x_2i+y_2j+z_2k))r^{-1} = r(x_1i+y_1j+z_1k)r^{-1} + r(x_2i+y_2j+z_2k)r^{-1} \\
&= R_r(x_1,y_1,z_1) + R_r(x_2,y_2,z_2) = R_r(p_1) + R_r(p_2)
\end{aligned}$$

и

$$R_r(\alpha p) = r(\alpha(x,y,z))r^{-1} = r(\alpha(xi+yj+zk))r^{-1} = \alpha r(xi+yj+zk)r^{-1} = \alpha rpr^{-1} = \alpha R_r(p).$$

Из доказане хомогености и адитивности следи линеарност пресликавања R_r.

Да бисмо доказали да су R_{kr} и R_r иста пресликавања, доказаћемо да се она поклапају на свакој тачки $p(x,y,z)$ из домена $\mathbb{R}^3$. Приметимо да је

$$R_{kr}(p) = krp(kr)^{-1} = krp\frac{1}{k}r^{-1} = k\frac{1}{k}rpr^{-1} = rpr^{-1} = R_r(p),$$

при чему смо користили да је $(kr)^{-1} = \frac{\overline{kr}}{\|kr\|^2} = \frac{k\bar{r}}{k^2\|r\|^2} = \frac{1}{k}\frac{\bar{r}}{\|r\|^2} = \frac{1}{k}r^{-1}$.

Да бисмо доказали да је $R_{r^{-1}}$ инверзно пресликавање пресликавања R_r довољно је доказати да ако је $R_r(p) = rpr^{-1}$ онда је $R_{r^{-1}}(rpr^{-1}) = p$. То следи из

$$R_{r^{-1}}(rpr^{-1}) = r^{-1}(rpr^{-1})(r^{-1})^{-1} = r^{-1}rpr^{-1}r = p,$$

при чему смо користили асоцијативност множења кватерниона, као и својства $(r^{-1})^{-1} = r$ и $r^{-1}r = rr^{-1} = 1$. □

Напоменимо да када је $r \neq 0$ из доказаног својства да за сваки ненула реални скалар k важи $R_{kr} = R_r$ следи да можемо сматрати да је полазни кватернион норме 1 када користимо пресликавање R_r јер ће нам то олакшати рачуне који следе јер је у том случају $r^{-1} = \frac{\bar{r}}{\|r\|^2} = \bar{r}$. Када је $r = 1$, R_r је идентичко пресликавање јер је $R_1(p) = 1 \cdot p \cdot 1^{-1} = p$, као и у случају $r = -1$ због $R_{-1}(p) = R_1(p)$.

***Теорема* 5.** *За јединични кватернион $r = a + bi + cj + dk \neq \pm 1$, пресликавање R_r је ротација чији је вектор осе ротације (b, c, d), а угао ротације θ задовољава* $\cos\theta = 2a^2 - 1$.

Доказ. Доказ ове теореме ћемо спровести у неколико корака. Прво доказујемо да пресликавање R_r чува норму, односно да за сваки чист кватернион облика $p = xi + yj + zk$ важи $\|R_r(p)\| = \|p\|$. Приметимо да се наведено својство може доказати и без претпоставке да је $\|r\| = 1$ користећи својство норме кватерниона $\|r^{-1}\| = 1/\|r\|$ јер важи

$$\|R_r(p)\| = \|rpr^{-1}\| = \|r\|\|p\|\|r^{-1}\| = \|r\|\|r^{-1}\|\|p\| = \|p\|.$$

Дакле, пресликавање R_r је изометрија простора $\mathbb{R}^3$, па налажењем сопствених вредности матрице овог пресликавања и скупа фиксних тачака пресликавања, на основу теореме о класификацији изометрија простора можемо установити о којој изометрији простора се ради. Испоставља се да линеарно пресликавање R_r има за реалну сопствену вредност само 1 и да је скуп фиксних тачака права са вектором правца (b, c, d). Проверимо да пресликавање R_r има сопствени вектор (b, c, d) са сопственом вредности 1, односно да је $R_r(b, c, d) = (b, c, d)$. Користећи да је $bi + cj + dk = r - a$ и да реалан број a комутира са кватернионима, имамо да је

$$R_r(b, c, d) = r(r-a)r^{-1} = (rr-ra)r^{-1} = (rr-ar)r^{-1} = (r-a)rr^{-1} = r-a = bi+cj+dk = (b, c, d).$$

Сада нам је циљ да нађемо угао ове осне ротације, а то ћемо урадити тако што ћемо прво погодно изабрати вектор који је ортогоналан на сопствени вектор (b, c, d). Разликујемо два случаја. У оба случаја ћемо угао ротације наћи као угао између вектора w и $R_r(w)$ користећи формулу из аналитичке геометрије са скаларним производом $\cos\theta = \frac{\langle w, R_r(w)\rangle}{\|w\|\|R_r(w)\|}$ која се своди на $\cos\theta = \frac{\langle w, R_r(w)\rangle}{\|w\|^2}$ јер смо већ доказали да је R_r изометрија, односно важи да је $\|R_r(w)\| = \|w\|$.

Ако је бар један од b и c различит од нуле онда узмемо $w = ci - bj$. Овај вектор је нормалан на вектор (b, c, d) јер је $\langle (b, c, d), (c, -b, 0)\rangle = bc - cb = 0$. Важи:

$$\begin{aligned}
R_r(w) =& (a + bi + cj + dk)(ci - bj)(a - bi - cj - dk)\\
=& (aci - abj - bc - b^2k - c^2k + bc + cdj + bdi)(a - bi - cj - dk)\\
\\
=& (aci - abj - b^2k - c^2k + cdj + bdi)(a - bi - cj - dk)\\
=& a^2ci + abc - ac^2k + acdj - a^2bj - ab^2k - abc + abdi - ab^2k + b^3j - b^2ci - b^2d - ac^2k + bc^2j\\
&- c^3i - c^2d + acdj + bcdk + c^2d - cd^2i + abdi + b^2d - bcdk + bd^2j\\
=& (a^2 - b^2 - c^2 - d^2)ci - (a^2 - b^2 - c^2 - d^2)bj - 2ac^2k - 2ab^2k + 2acdj + 2abdi\\
=& (c(a^2 - b^2 - c^2 - d^2) + 2abd)i + (-(a^2 - b^2 - c^2 - d^2)b + 2acd)j + (-2ac^2 - 2ab^2)k\\
=& (c(a^2 - b^2 - c^2 - d^2) + 2abd, -(a^2 - b^2 - c^2 - d^2)b + 2acd, -2ac^2 - 2ab^2).
\end{aligned}$$

Зато је:

$$\cos\theta = \frac{\langle (c,-b,0), R_r(w)\rangle}{(\sqrt{b^2+c^2})^2} = \frac{c^2(a^2-b^2-c^2-d^2)+2abcd+b^2(a^2-b^2-c^2-d^2)-2abcd}{b^2+c^2}$$
$$= \frac{(a^2-b^2-c^2-d^2)(b^2+c^2)}{b^2+c^2} = a^2-b^2-c^2-d^2 = 2a^2-(a^2+b^2+c^2+d^2) = 2a^2-1.$$

Ако је $b = c = 0$ онда бирамо $w = i$. Овај вектор је нормалан на вектор (b,c,d) јер важи да је $\langle (b,c,d),(1,0,0)\rangle = b = 0$. Важи:

$$R_r(w) = (a+bi+cj+dk)i(a-bi-cj-dk) = (ai+dj)(a-dk)$$
$$= a^2i+adj+adj-d^2i = (a^2-d^2)i+2adj.$$

Зато је:

$$\cos\theta = \frac{\langle (1,0,0), R_r(w)\rangle}{(\sqrt{1^2})^2} = \frac{\langle (1,0,0),((a^2-d^2),2ad,0)\rangle}{1}$$
$$= a^2-d^2 = 2a^2-(a^2+b^2+c^2+d^2) = 2a^2-1,$$

при чему смо користили да је $b = c = 0$. У оба случаја за угао ротације важи $\cos\theta = 2a^2-1$. □

Помоћу ове теореме Хамилтон је успео да повеже композицију ротација са операцијом множења кватерниона јер је $R_r \circ R_s = R_{rs}$. Ово је једноставно доказати јер $\forall p \in \mathbb{R}^3$ важи

$$R_r \circ R_s(p) = R_r(R_s(p)) = R_r(sps^{-1}) = r(sps^{-1})r^{-1} = (rs)ps^{-1}r^{-1} = (rs)p(rs)^{-1} = R_{rs}(p), \quad (9)$$

при чему смо користили својство асоцијативности множења кватерниона и чињеницу да је инверз производа rs једнак $s^{-1}r^{-1}$. Уочимо да сада можемо тврдити да су од јединичних кватерниона само кватерниони $r = -1$ и $r = 1$ такви да је $R_r = \mathrm{Id}$. Да других таквих кватерниона нема следи из претходне теореме јер је идентичко пресликавање заправо ротација за угао од 0 степени, те је $\cos 0 = 2a^2-1$, одакле је $a^2 = 1$, али како кватернион $r = (a,b,c,d) \in S^3$, то он мора бити норме 1, а већ имамо $a = \pm 1$, одакле заиста закључујемо да мора бити $r = 1$ или $r = -1$.

Већ смо приметили да су нам за проучавање ротација R_r довољни кватерниони норме 1. Ако скуп кватерниона јединичне дужине посматрамо као скуп тачака у $\mathbb{R}^4$ онда је то сфера S^3.

Сада желимо да успоставимо везу између Хопфовог пресликавања h из (4) и ротације помоћу кватерниона. Нека је $P_0(1,0,0)$ једна истакнута тачка на сфери S^2. За дату тачку $(a,b,c,d) \in S^3$ нека је $r = a+bi+cj+dk$ придружени јединични кватернион. Већ смо видели како јединични кватернион r дефинише ротацију R_r у простору димензије три.

Дефиниција 5. Хопфово пресликавање из S^3 у S^2 је пресликавање које јединични кватернион r пресликава у $R_r(1,0,0) = ri\bar{r}$.

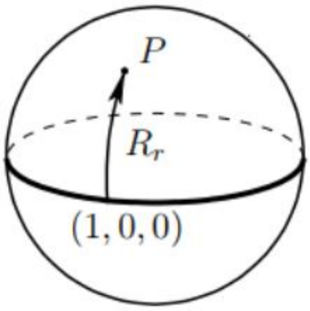
Уочимо да коректност дефиниције следи јер је $ri\bar{r}$ норме 1 због $\|ri\bar{r}\| = \|r\|\|i\|\|\bar{r}\| = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$.

Теорема 6. *Дефиниција Хопфовог пресликавања h из (4) и дефиниција дата са $r \mapsto ri\bar{r}$ су међусобно еквивалентне.*

Доказ. За $r = a+bi+cj+dk$ је

$$ri\bar{r} = (a+bi+cj+dk)i(a-bi-cj-dk) = (ai-b-ck+dj)(a-bi-cj-dk)$$
$$= a^2i+ab-ack+adj-ab+b^2i+bcj+bdk-ack+bcj-c^2i-cd+adj+bdk+cd-d^2i$$
$$= (a^2+b^2-c^2-d^2)i+2(ad+bc)j+2(bd-ac)k.$$

Овај кватернион представља елемент $(a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac))$ на сфери S^2. Овим смо доказали да су дате две дефиниције Хопфовог пресликавања из сфере S^3 у сферу S^2 еквивалентне. $\square$



Хопфово пресликавање h слика r у $P = R_r(1, 0, 0)$

Уместо $\cos t + i \sin t$ ћемо писати e^{it}. У леми 5 смо доказали да је инверзна слика произвољне тачке $P(p_1, p_2, p_3)$ при Хопфовом пресликавању h, односно $h^{-1}(P)$, круг у S^3. Како је $\{e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ круг то је довољно доказати да је $\{e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\} \subset h^{-1}(1, 0, 0)$ да би важило $h^{-1}(1, 0, 0) = \{e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$. То важи јер за $t \in [0, 2\pi]$ имамо

$$\begin{aligned} h(e^{it}) &= e^{it} i \overline{e^{it}} = e^{it} i e^{-it} = (\cos t + i \sin t) i (\cos t - i \sin t) = (-\sin t + i \cos t)(\cos t - i \sin t) \\ &= -\sin t \cos t + i \sin^2 t + i \cos^2 t + \cos t \sin t = i = (1, 0, 0). \end{aligned}$$

Слично за тачку $(-1, 0, 0)$ имамо да је $h^{-1}(-1, 0, 0) = \{ke^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ јер је $h^{-1}(-1, 0, 0)$ круг и за $t \in [0, 2\pi]$ важи

$$\begin{aligned} h(ke^{it}) &= ke^{it} i \overline{ke^{it}} = ke^{it} i e^{-it} \overline{k} = k(\cos t + i \sin t) i (\cos t - i \sin t) \overline{k} = k(-\sin t + i \cos t)(\cos t - i \sin t) \overline{k} \\ &= k(-\sin t \cos t + i \sin^2 t + i \cos^2 t + \cos t \sin t) \overline{k} = ki\overline{k} = j(-k) = -jk = -i = (-1, 0, 0). \end{aligned}$$

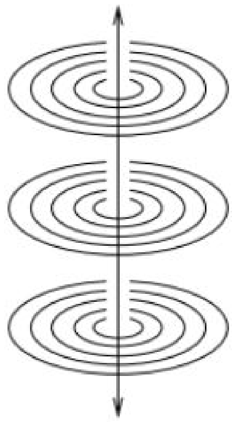
Скуп $h^{-1}(P)$ називамо фибра Хопфовог пресликавања h над P и већ смо доказали да су то кругови на сфери S^3. Приметимо и да су фибре Хопфовог пресликавања h над различитим тачкама P_1 и P_2 међусобно дисјунктне јер ако би постојала нека тачка m која се налази у обе фибре, онда би $h(m)$ било и P_1 и P_2 што није могуће јер је $P_1 \neq P_2$.

6 Попуњавање простора $\mathbb{R}^3$ уланчаним круговима и правом

Покушајмо да решимо следећи проблем који ћемо поставити у облику мозгалице.

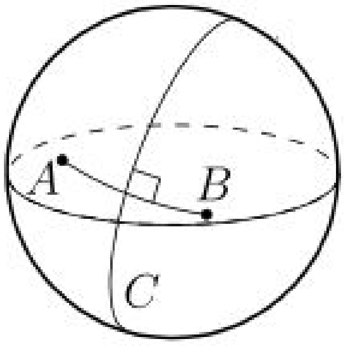
Мозгалица: Користећи дисјунктне кругове и једну праву попунити простор $\mathbb{R}^3$ тако да је сваки пар кругова уланчан и да права пролази кроз унутрашњост сваког круга.

Два круга су уланчана ако сваки од њих сече раван другог круга тачно два пута, једном у унутрашњости, а други пут у спољашњости другог круга. Тежина ове мозгалице је што кругови треба да буду уланчани. Без овог услова постојало би једноставно решење где бисмо имали наслагане концентричне кругове чији су центри на правој као на наредној слици.



Један начин да се простор $\mathbb{R}^3$ попуни помоћу дисјунктних кругова и једне праве

У решавању поменутог проблема користићемо геометријску конфигурацију фибри Хопфовог пресликавања h у сфери S^3. Да бисмо решили дату мозгалицу помоћу Хопфовог пресликавања размотримо прво које осне ротације сликају дату тачку A у дату тачку B. Дакле, занима нас да за две дате тачке A и B на S^2 опишемо неке погодне осне ротације које сликају A у B. Прво уочимо кружни лук великог круга који спаја тачке A и B и приметимо да његов избор није јединствен, изаберимо мањи и означимо га са $\overline{AB}$. Ако је R осна ротација која слика тачку A у тачку B онда свака тачка осе ротације R има особину да је једнако удаљена од тачака A и B, те је оса ротације R подскуп симетралне равни дужи AB, а та раван сече сферу S^2 по великом кругу који полови лук $\overline{AB}$, те зато оса ротације која сече сферу S^2 сече велики круг који полови лук $\overline{AB}$.



Велики круг који полови лук $\overline{AB}$

У оквиру овог великог круга постоје две осе ротације за које је једноставно да се израчуна угао ротације. Прва таква је оса ротације која садржи средиште M лука $\overline{AB}$ и центар сфере O и тада је угао ротације једнак π. Назовимо ову ротацију R_1. Друга погодна оса ротације је права нормална на векторе $v = \overrightarrow{OA}$ и $w = \overrightarrow{OB}$ и тада је угао ротације заправо угао између вектора v и w и важи $\cos\theta = \langle v, w\rangle$ јер $\|v\| = \|w\| = 1$, $v, w \in S^2$. Назовимо ову ротацију R_2.

Две ротације R_1 и R_2 које сликају тачку A у тачку B

Посматрајмо сада специјалан случај када је $A(1,0,0)$ и $B = P$ где је P произвољна тачка са сфере S^2. Онда ротације R_1 и R_2 сликају тачку $(1,0,0)$ у P и знамо да су углови ових ротација R_1 и R_2 једнаки редом π и θ где је $\cos\theta = \langle (1,0,0), (p_1, p_2.p_3)\rangle = p_1$ под претпоставком да су координате тачке $P(p_1, p_2, p_3)$. Како имамо осе и углове ротација R_1 и R_2 можемо наћи кватернионе r_1 и r_2 такве да је $R_1 = R_{r_1}$ и $R_2 = R_{r_2}$.

Теорема 7. *За дату тачку $P(p_1, p_2, p_3) \in S^2$ такву да је $p_1 \neq \pm 1$ кватерниони помоћу којих се могу представити ротације $R_1 = R_{r_1}$ и $R_2 = R_{r_2}$ су дати формулама:*

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}}((1+p_1)i + p_2 j + p_3 k),$$
$$r_2 = \sqrt{\frac{1+p_1}{2}}\left(1 + \frac{-p_3 j}{1+p_1} + \frac{p_2 k}{1+p_1}\right).$$

Доказ. Пронађимо прво кватернион $r_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ који одговара ротацији R_1. На основу Теореме 5 имамо да је $\cos\pi = 2a_1^2 - 1$, одакле је $-1 = 2a_1^2 - 1$ односно $a_1 = 0$. Знамо да је (b_1, c_1, d_1) вектор осе ротације R_1 и $\|r_1\| = 1$ односно $b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 1$. Оса ротације R_1 је права која садржи тачке $O(0,0,0)$ и M при чему је M средиште лука $\overline{AP}$ и вектор $\overrightarrow{OM}$ је јединични јер $M \in S^2$. Јасно је да права OM садржи и средиште M' дужи AP чије су координате $\left(\frac{1+p_1}{2}, \frac{0+p_2}{2}, \frac{0+p_3}{2}\right) = \left(\frac{1+p_1}{2}, \frac{p_2}{2}, \frac{p_3}{2}\right)$, па је $M\left(\lambda\frac{1+p_1}{2}, \frac{\lambda p_2}{2}, \frac{\lambda p_3}{2}\right)$ и λ тражимо из услова $\left(\lambda\frac{1+p_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda p_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda p_3}{2}\right)^2 = 1$ јер $M \in S^2$.

Одавде имамо да је: $1 = \lambda^2\left(\left(\frac{1+p_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_3}{2}\right)^2\right) = \lambda^2\left(\frac{1+2p_1+p_1^2}{4} + \frac{p_2^2}{4} + \frac{p_3^2}{4}\right)$ што после множења са 4 постаје $\lambda^2(1+2p_1+p_1^2+p_2^2+p_3^2) = 4$. Сада искористимо да $P(p_1, p_2, p_3) \in S^2$, па је $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$, одакле је $\lambda^2 = \frac{4}{2+2p_1}$, а како важи распоред тачака (O, M', M) то је $\lambda > 0$, па је $\lambda = \sqrt{\frac{2}{1+p_1}}$. Зато је $(b_1, c_1, d_1) = \overrightarrow{OM} = \sqrt{\frac{2}{1+p_1}}\left(\frac{1+p_1}{2}, \frac{p_2}{2}, \frac{p_3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}}(1 + p_1, p_2, p_3)$ чиме смо доказали да је $r_1 = 0 + \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}}(1+p_1)i + \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}}p_2 j + \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}}p_3 k = \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}}((1+p_1)i + p_2 j + p_3 k)$.

Пронађимо сада кватернион $r_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ који одговара осној ротацији R_2. На основу Теореме 5 имамо да је $2a_2^2 - 1 = \cos\theta = p_1$, одакле је $a_2^2 = \frac{1+p_1}{2}$ и како смо већ видели да кватерниони r_2 и $-r_2$ одређују исту осну ротацију то без умањења општости можемо претпоставити да је $a_2 > 0$ односно $a_2 = \sqrt{\frac{1+p_1}{2}}$. Оса ротације R_2 има вектор који је ортогоналан на векторе $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OP}$ односно $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OP} = (1,0,0) \times (p_1, p_2, p_3) = (0, -p_3, p_2)$ и зато важи да је $(b_2, c_2, d_2) = \lambda(0, -p_3, p_2)$ при чему је $\lambda > 0$ јер су вектор $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OP}$ и вектор који тражимо колинеарни и исто усмерени и $\|r_2\| = 1$ те је $\frac{1+p_1}{2} + \lambda^2 \cdot 0^2 + \lambda^2 p_3^2 + \lambda^2 p_2^2 = 1$ односно $\lambda^2(p_2^2 + p_3^2) = 1 - \frac{1+p_1}{2}$ што се кад искористимо $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$ своди на $\lambda^2(1 - p_1^2) = \frac{1-p_1}{2}$. Одавде имамо да $\lambda^2 = \frac{1}{2(1+p_1)}$ што се због $\lambda > 0$ своди на $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}}$. Приметимо да немамо дељење са нулом јер је $p_1 \neq \pm 1$ због претпоставке теореме. Одавде закључујемо да је

$$\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{\frac{1+p_1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}} \cdot 0i + \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}}(-p_3)j + \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}} p_2 k \\ &= \sqrt{\frac{1+p_1}{2}} \left(1 + \frac{-p_3 j}{1+p_1} + \frac{p_2 k}{1+p_1}\right). \end{aligned}$$

□

Нека су за произвољну тачку $P(p_1, p_2, p_3)$ такву да $p_1 \neq \pm 1$ кватерниони r_1 и r_2 дефинисани као у претходној теореми. Како је $\{r_1 e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ круг то је довољно показати да је $\{r_1 e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\} \subset h^{-1}(P)$ да бисмо одредили $h^{-1}(P)$. За $0 \leq t \leq 2\pi$ важи

$$\begin{aligned} h(r_1 e^{it}) =& r_1 e^{it} i \overline{r_1 e^{it}} = r_1 e^{it} i e^{-it} \overline{r_1} = r_1 e^{it} i (\cos t - i \sin t) \overline{r_1} = r_1 (\cos t + i \sin t)(\sin t + i \cos t) \overline{r_1} \\ =& r_1 (\cos t \sin t + i \cos^2 t + i \sin^2 t - \sin t \cos t) \overline{r_1} = r_1 i \overline{r_1} = h(r_1) = P, \end{aligned}$$

где последња једнакост важи јер осна ротација R_{r_1} слика тачку $(1,0,0)$ у P. Слично, фибру $h^{-1}(P)$ можемо параметарски видети као круг у $\mathbb{R}^4$ помоћу $\{r_2 e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$. Како смо раније доказали да је $h^{-1}(P)$ круг то је довољно доказати да је $\{r_2 e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\} \subset h^{-1}(P)$. Приметимо да за $0 \leq t \leq 2\pi$ важи

$$\begin{aligned} h(r_2 e^{it}) &= r_2 e^{it} i \overline{r_2 e^{it}} = r_2 e^{it} i e^{-it} \overline{r_2} = r_2 e^{it} i (\cos t - i \sin t) \overline{r_2} = r_2 (\cos t + i \sin t)(\sin t + i \cos t) \overline{r_2} \\ &= r_2 (\cos t \sin t + i \cos^2 t + i \sin^2 t - \sin t \cos t) \overline{r_2} = r_2 i \overline{r_2} = h(r_2) = P, \end{aligned}$$

где последња једнакост важи јер осна ротација R_{r_2} слика тачку $(1,0,0)$ у P. Раније смо одредили и фибре $h^{-1}(1,0,0) = \{e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ и $h^{-1}(-1,0,0) = \{k e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

Означимо са s стереографску пројекцију из $S^3 \backslash \{(1,0,0,0)\}$ у $\mathbb{R}^3$ која слика тачку (w, x, y, z) у тачку $(\frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}, \frac{z}{1-w})$. Тада је

$$\begin{aligned} s \circ h^{-1}(1,0,0) &= s(\{e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}) = \{s(e^{it}) : 0 \leq t \leq 2\pi\} = \{s(\cos t, \sin t, 0, 0) : 0 \leq t \leq 2\pi\} \\ &= \left\{ \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t}, 0, 0 \right) : 0 \leq t \leq 2\pi \right\}, \end{aligned}$$

односно x-оса, док је

$$\begin{aligned} s \circ h^{-1}(-1,0,0) &= s(\{k e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}) = \{s(k e^{it}) : 0 \leq t \leq 2\pi\} = \{s(k(\cos t + i \sin t)) : 0 \leq t \leq 2\pi\} \\ &= \{s(j \sin t + k \cos t) : 0 \leq t \leq 2\pi\} = \{s(0, 0, \sin t, \cos t) : 0 \leq t \leq 2\pi\} \\ &= \left\{ \left(\frac{0}{1-0}, \frac{\sin t}{1-0}, \frac{\cos t}{1-0} \right) : 0 \leq t \leq 2\pi \right\} = \{(0, \sin t, \cos t) : 0 \leq t \leq 2\pi\} \end{aligned}$$

јединични круг у yz равни.

Теорема 8. *За сваку тачку* $P(p_1,p_2,p_3)\in S^2$ *различиту од* $(1,0,0)$ *и* $(-1,0,0)$ *је* $s\circ h^{-1}(P)$ *круг у* $\mathbb{R}^3$ *који сече* yz *раван у тачно две тачке* A *и* B *при чему је једна унутар, а друга ван јединичног круга у* yz *равни.*

Доказ. За произвољну тачку $P(p_1,p_2,p_3)\in S^2$ различиту од $(1,0,0)$ и $(-1,0,0)$ је:

$$\begin{aligned}s\circ h^{-1}(P)&=s(\{r_1e^{it}:0\le t\le 2\pi\})\\&=s\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}}((1+p_1)i+p_2j+p_3k)(\cos t+i\sin t):0\le t\le 2\pi\right\}\right),\end{aligned}$$

а како је

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}}((1+p_1)i+p_2j+p_3k)(\cos t+i\sin t)\\&=\frac{(1+p_1)\cos t}{\sqrt{2(1+p_1)}}i-\frac{(1+p_1)\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}}+\frac{p_2\cos t}{\sqrt{2(1+p_1)}}j-\frac{p_2\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}}k+\frac{p_3\cos t}{\sqrt{2(1+p_1)}}k+\frac{p_3\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}}j\\&=\left(-\frac{(1+p_1)\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}},\frac{(1+p_1)\cos t}{\sqrt{2(1+p_1)}},\frac{p_2\cos t+p_3\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}},\frac{p_3\cos t-p_2\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}}\right)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&s\left(-\frac{(1+p_1)\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}},\frac{(1+p_1)\cos t}{\sqrt{2(1+p_1)}},\frac{p_2\cos t+p_3\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}},\frac{p_3\cos t-p_2\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}}\right)\\&=\left(\frac{\frac{(1+p_1)\cos t}{\sqrt{2(1+p_1)}}}{1+\frac{(1+p_1)\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}}},\frac{\frac{p_2\cos t+p_3\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}}}{1+\frac{(1+p_1)\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}}},\frac{\frac{p_3\cos t-p_2\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}}}{1+\frac{(1+p_1)\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}}}\right)\\&=\left(\frac{(1+p_1)\cos t}{\sqrt{2(1+p_1)}+(1+p_1)\sin t},\frac{p_2\cos t+p_3\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}+(1+p_1)\sin t},\frac{p_3\cos t-p_2\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}+(1+p_1)\sin t}\right)\end{aligned}$$

то је $s\circ h^{-1}(P)=\left\{\left(\frac{(1+p_1)\cos t}{\sqrt{2(1+p_1)}+(1+p_1)\sin t},\frac{p_2\cos t+p_3\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}+(1+p_1)\sin t},\frac{p_3\cos t-p_2\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}+(1+p_1)\sin t}\right):0\le t\le 2\pi\right\}$.

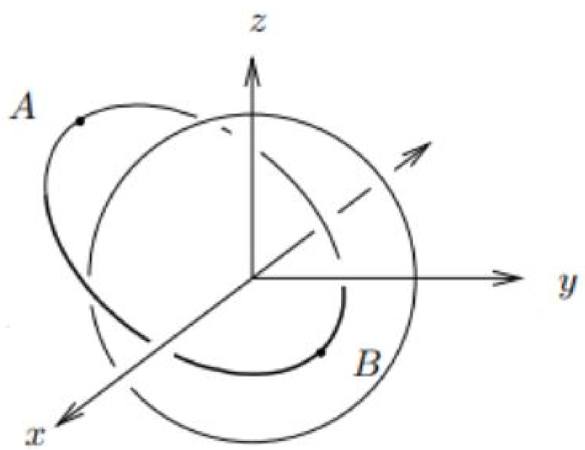
Приметимо да је $h^{-1}(P)$ круг на сфери S^3 који не садржи $(1,0,0,0)$ јер да је садржи постојало би $0\le t\le 2\pi$ такво да $-\frac{(1+p_1)\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}}=1$, $\frac{(1+p_1)\cos t}{\sqrt{2(1+p_1)}}=0$, $\frac{p_2\cos t+p_3\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}}=0$ и $\frac{p_3\cos t-p_2\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}}=0$. Како је по претпоставци $p_1\neq -1$ то мора бити $\cos t=0$, $p_3=0$ и $p_2=0$. Али $P(p_1,p_2,p_3)\in S^2$, те би морало бити $p_1^2=1$ односно $p_1=1$ или $p_1=-1$ што је у контрадикцији са полазном претпоставком. Како је $h^{-1}(P)$ круг на сфери S^3 који не садржи тачку $(1,0,0,0)$ то по раније доказаном својству стереографске пројекције знамо да је $s\circ h^{-1}(P)$ круг у $\mathbb{R}^3$. Тачке у којима круг $s\circ h^{-1}(P)$ сече yz раван одређујемо тако што додамо услов $x=0$, односно прва координата $\frac{(1+p_1)\cos t}{\sqrt{2(1+p_1)}+(1+p_1)\sin t}$ мора бити нула. Због претпоставке да је $p_1\neq -1$ одавде следи да је $\cos t=0$, а како $0\le t\le 2\pi$ то нам оставља две могућности за $\sin t$ и то су ± 1. Зато постоје две пресечне тачке круга $s\circ h^{-1}(P)$ и yz равни и оне су $A\left(0,\frac{p_3}{\sqrt{2(1+p_1)}+1+p_1},\frac{-p_2}{\sqrt{2(1+p_1)}+1+p_1}\right)$ и $B\left(0,\frac{-p_3}{\sqrt{2(1+p_1)}-(1+p_1)},\frac{p_2}{\sqrt{2(1+p_1)}-(1+p_1)}\right)$. Како су обе тачке у yz равни, да бисмо установили да ли су оне унутар или ван јединичног круга у yz равни, довољно је доказати да су норме $\|\overrightarrow{OA}\|$ и $\|\overrightarrow{OB}\|$ мање или веће од 1.

Имамо и $\|\overrightarrow{OA}\|^2=\frac{p_2^2+p_3^2}{(\sqrt{1+p_1}(\sqrt{2}-\sqrt{1+p_1}))^2}=\frac{1-p_1^2}{(1+p_1)(2+1+p_1-2\sqrt{2(1+p_1)})}=\frac{1-p_1}{3+p_1-2\sqrt{2(1+p_1)}}>1$ јер важи да је $3+p_1-2\sqrt{2(1+p_1)}=(\sqrt{2}-\sqrt{1+p_1})^2>0$, те можемо помножити обе стране неједнакости са тим изразом и добијамо $3 + p_1 - 2\sqrt{2(1+p_1)} < 1 - p_1$ што је еквивалентно са $2 + 2p_1 < 2\sqrt{2(1+p_1)}$ што је тачна неједнакост јер је $1 + p_1 < \sqrt{2(1+p_1)}$ односно $\sqrt{1+p_1} < \sqrt{2}$ због $p_1 \in (-1, 1)$. Дакле, важи $\|\overrightarrow{OA}\| > 1$ те се тачка A налази ван јединичног круга у yz равни.

Важи $\|\overrightarrow{OB}\|^2 = \frac{p_2^2+p_3^2}{(\sqrt{1+p_1}(\sqrt{2}+\sqrt{1+p_1}))^2} = \frac{1-p_1^2}{(1+p_1)(2+1+p_1+2\sqrt{2(1+p_1)})} = \frac{1-p_1}{3+p_1+2\sqrt{2(1+p_1)}} < 1$ јер имамо да је $3+p_1+2\sqrt{2(1+p_1)} > 0$ због $p_1 \in (-1, 1)$ (јер је $p_1^2+p_2^2+p_3^2 = 1$), па можемо помножити обе стране неједнакости са тим изразом и добијамо $1 - p_1 < 3 + p_1 + 2\sqrt{2(1+p_1)}$ што је еквивалентно са $-1 - p_1 < \sqrt{2(1+p_1)}$ што је тачна неједнакост јер је $-1 - p_1 < 0$ и $\sqrt{2(1+p_1)} \geq 0$. Дакле, важи $\|\overrightarrow{OB}\| < 1$ те се тачка B налази унутар јединичног круга у yz равни.

□

Из доказа претходне теореме закључујемо да је за произвољну тачку $P(p_1, p_2, p_3)$ која је различита од $(1, 0, 0)$ и $(-1, 0, 0)$ круг $s \circ h^{-1}(P)$ уланчан са јединичним кругом у yz равни.



Пројектована фибра сече јединични круг у yz равни у тачкама A и B

Теорема 9. *Права која представља x-осу сече унутрашњост сваког од кругова $s \circ h^{-1}(P)$ за $P(p_1, p_2, p_3)$ такво да $p_1 \neq \pm 1$.*

Доказ. Из доказа Теореме 8 можемо приметити и да тачке A и B припадају правој кроз координатни почетак чији је вектор правца $(0, p_3, -p_2)$. За тачку M са дужи AB важи $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}$ односно

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} =& \lambda\left(0, \frac{p_3}{\sqrt{2(1+p_1)}+1+p_1}, \frac{-p_2}{\sqrt{2(1+p_1)}+1+p_1}\right)\\ &+ (1-\lambda)\left(0, -\frac{p_3}{\sqrt{2(1+p_1)}-(1+p_1)}, \frac{p_2}{\sqrt{2(1+p_1)}-(1+p_1)}\right)\\ =& \left(0, \frac{(2\lambda\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{1+p_1})p_3\sqrt{1+p_1}}{(1+p_1)(1-p_1)}, \frac{(-2\lambda\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{1+p_1})p_2\sqrt{1+p_1}}{(1+p_1)(1-p_1)}\right),\end{aligned}$$

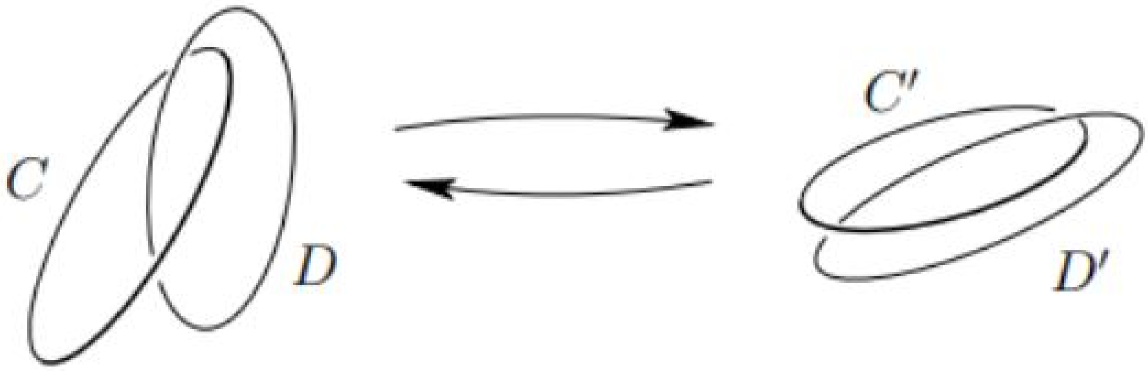
при чему $\lambda \in [0, 1]$.

Приметимо да за $\lambda = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+p_1}}{2\sqrt{2}} \in [0, 1]$ добијамо да дуж AB садржи координатни почетак, па како и x-оса садржи координатни почетак то x-оса бар сече дуж AB односно бар продире раван круга $s \circ h^{-1}(P)$ у унутрашњости јединичног круга у yz равни. Остаје још само да покажемо да није могуће да x-оса читава припада равни круга $s \circ h^{-1}(P)$

јер како садржи тачку дужи AB то би значило да она мора сећи круг $s \circ h^{-1}(P)$.
Ако $s \circ h^{-1}(P) = \left\{ \left(\frac{(1+p_1)\cos t}{\sqrt{2(1+p_1)}+(1+p_1)\sin t}, \frac{p_2\cos t+p_3\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}+(1+p_1)\sin t}, \frac{p_3\cos t-p_2\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}+(1+p_1)\sin t} \right) : 0 \leq t \leq 2\pi \right\}$ садржи тачку са x осе, постојало би $t \in [0, 2\pi]$ за које важи да је $\frac{p_2\cos t+p_3\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}+(1+p_1)\sin t} = 0$ и $\frac{p_3\cos t-p_2\sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}+(1+p_1)\sin t} = 0$. Одавде је $p_2\cos t + p_3\sin t = 0$ и $p_3\cos t - p_2\sin t = 0$, па након множења прве једначине са $\cos t$, а друге са $-\sin t$ сабирањем добијамо $p_2(\cos^2 t + \sin^2 t) = 0$ односно $p_2 = 0$. Заменом у поменуте две једначине добијамо $p_3\sin t = 0$ и $p_3\cos t = 0$, одакле је јасно да мора бити $p_3 = 0$, али због $P(p_1, p_2, p_3) \in S^3$ важи $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$ тј $p_1^2 = 1$, што је у контрадикцији са претпоставком да $p_1 \neq \pm 1$. Дакле, овим смо доказали да x-оса заиста пролази кроз унутрашњост сваког од кругова $s \circ h^{-1}(P)$ за $P(p_1, p_2, p_3)$ такво да $p_1 \neq \pm 1$. □

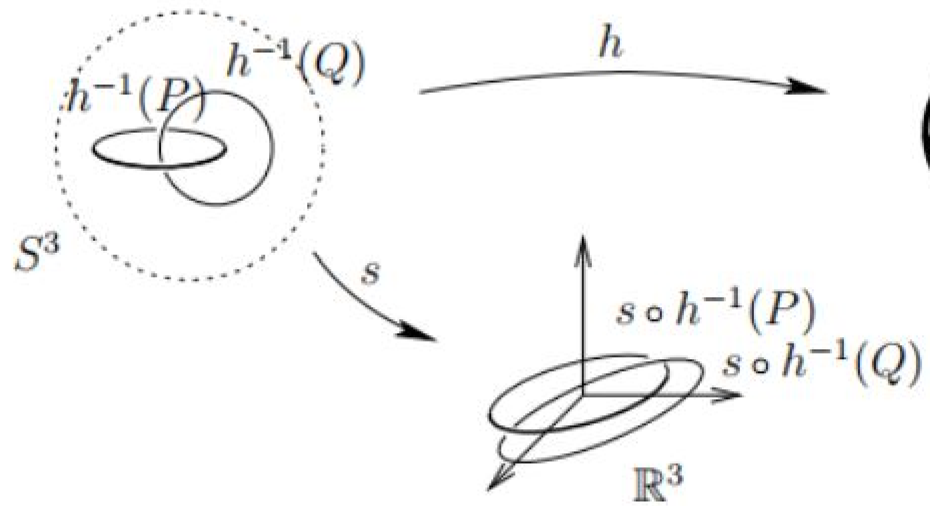
***Теорема* 10.** *Сваке две пројектоване фибре Хопфовог пресликавања су уланчане, односно за сваке две различите тачке $P(p_1, p_2, p_3)$ и $P'(p_1', p_2', p_3')$ такве да је $p_1 \neq \pm 1$ и $p_1' \neq \pm 1$ важи да су кругови $s \circ h^{-1}(P)$ и $s \circ h^{-1}(P')$ уланчани.*

Доказ. Да бисмо доказали да су произвољне две пројектоване фибре Хопфовог пресликавања h уланчане, односно кругови $C = s \circ h^{-1}(P)$ и $D = s \circ h^{-1}(P')$ уланчани, уочимо непрекидно инјективно пресликавање из $\mathbb{R}^3$ у $\mathbb{R}^3$ које слика круг C у јединични круг C' у yz равни, а D у неку другу пројектовану фибру D', где је D' круг. Како смо већ доказали Теорему 8 која нам говори да је круг D' уланчан са јединичним кругом C' у yz равни, јасно је да и полазни кругови C и D морају бити уланчани, да би кругови остали уланчани и након дејства непрекидним бијективним пресликавањем. □



Ако су слике C' и D' кругова C и D при непрекидном бијективном пресликавању уланчане, онда и C и D морају бити уланчани

Овим смо решили мозгалицу наведену раније користећи стереографске пројекције фибри Хопфовог пресликавања h из сфере S^3 у сферу S^2 тако што нам простор $\mathbb{R}^3$ попуњавају Хопфове фибре које су пројектоване у $\mathbb{R}^3$ помоћу стереографске пројекције, а те фибре су права $s \circ h^{-1}((1, 0, 0))$ која представља x-осу, јединични круг $s \circ h^{-1}((-1, 0, 0))$ у yz равни и кругови $s \circ h^{-1}(P)$ за $P(p_1, p_2, p_3)$ такве да $p_1 \neq \pm 1$ који су уланчани са јединичним кругом у yz равни, али и међусобно. Доказали смо да x-оса продире кроз унутрашњост сваког од кругова чиме смо испунили све захтеве мозгалице и илустровали једну неочекивану примену Хопфовог пресликавања h из сфере S^3 у сферу S^2 у проблему попуњавања простора $\mathbb{R}^3$ помоћу уланчаних кругова и једне праве.



Стереографске пројекције Хопфових фибри су уланчани кругови сем $s \circ h^{-1}((1,0,0))$ који је права која сече унутрашњост сваког круга

7 Закључак

У раду је решен проблем попуњавања простора $\mathbb{R}^3$ коришћењем дисјунктних кругова и једне праве тако да су свака два круга уланчана и да права пролази кроз унутрашњост сваког круга. Тежина проблема је што кругови треба да буду уланчани. Дефинисане су вишедимензионе сфере S^n које се налазе у еуклидским просторима $\mathbb{R}^{n+1}$.

Описана је стереографска пројекција која нам омогућава да сферу S^n пресликамо у простор $\mathbb{R}^n$, специјално сферу S^2 у xy раван. Слично је дефинисана стереографска пројекција s са сфере S^3 у еуклидски простор $\mathbb{R}^3$.
Дат је кратак историјски преглед о настанку кватерниона, наведена су њихова основна својства, као и веза са тродимензионом геометријом коју је открио ирски математичар Хамилтон 1835. године. Дефинисано је Хопфово пресликавање из S^3 у S^2 као пресликавање $h : S^3 \to S^2$ И показано је каква је његова веза са осним ротацијама у тродимензионом простору помоћу кватерниона.

У раду су испитиване стереографске пројекције фибри Хопфовог пресликавања h и доказано је да је $s \circ h^{-1}(1, 0, 0)$ права која представља x-осу, $s \circ h^{-1}(-1, 0, 0)$ јединични круг у yz равни и да су кругови $s \circ h^{-1}(P)$ за $P(p_1, p_2, p_3) \in S^2$ и $p_1 \neq \pm 1$, уланчани са јединичним кругом у yz равни, али и међусобно. Доказано је да x-оса продире кроз унутрашњост сваког од кругова $s \circ h^{-1}(P)$ за $P(p_1, p_2, p_3) \in S^2$ и $p_1 \neq \pm 1$.

Проблем представљања $\mathbb{R}^3$ као уније дисјунктних уланчаних кругова и једне праве решен је коришћењем стереографских пројекција фибри Хопфовог пресликавања h из сфере S^3 у сферу S^2.

Литература

[1] L. Connellan, *Spheres, hyperspheres and quaternions*, Final Year Project for the MMath degree at the University of Surrey, 2014.

[2] H. Hopf, *Über die abbildungen der dreidimensionalen sphäre auf die kugelfläche*, Math. Ann. **104** (1931), 637–665.

[3] В. Илић, *Кватерниони и њихова примена у геометрији*, мастер рад, 2011.

[4] D. W. Lyons, *An elementary introduction to the Hopf fibration*, Math. Mag. **76** (2003), 87–98.

[5] F. W. Sohon, *The Stereographic Projection*, Literary Licensing, LLC (2013)

[6] Z. Treisman, *A young person's guide to the Hopf fibration*, arXiv:0908.1205 [math.HO]